Prova scritta di Analisi Matematica T - 09/07/2019

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e per l'Ambiente e il Territorio - A.A 2018/19

MATRICOLA...................... **NOME E COGNOME................................**

(1) (6 punti) Calcolare il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x^3}-3+e^{2\sin x}-\cos x-\frac{5}{2}\tan(x^2)-2x}{\log(2+x)[\arctan(x)-x]}$$

ricordando che

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5) \quad \text{per } x\to 0.$$

$$(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3+o(x^3) \quad \text{per } x\to 0$$

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5) \quad \text{per } x\to 0.$$

$\boxed{Num}$: • $\sqrt{9+x^3}-3 = 3\left[\sqrt{1+\frac{x^3}{9}}-1\right] = 3\left[\cancel{1}+\frac{x^3}{18}\cancel{-1}+o(x^3)\right] = \frac{x^3}{6}+o(x^3)$

• $e^{2\,\text{sen}x} = e^{2x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$

$= 1+2x+4\frac{x^2}{2}+\frac{8x^3}{6}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$= 1+2x+2x^2+x^3+o(x^3)$

• $-\cos x = -1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$

• $-\frac{5}{2}\text{Tan}(x^2) = -\frac{5}{2}x^2+o(x^3)$

Sommando tutti i termini a numeratore si ha:

$\boxed{Num} = \frac{x^3}{6}+\cancel{1}+\cancel{2x}+\cancel{2x^2}+x^3\cancel{-1}+\cancel{\frac{1}{2}x^2}\cancel{-\frac{5}{2}x^2}\cancel{-2x}+o(x^3)$

$= \frac{x^3}{6}+x^3 = \frac{7}{6}x^3$

$\boxed{Den} = \log(2)\cdot\left[-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{Num}{Den} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{6}x^3}{-\frac{x^3}{3}\cdot\log 2} = \boxed{-\frac{7}{2\log 2}}$

MATRICOLA.......................   NOME E COGNOME.................................

(2) (4 punti) Scrivere $\dfrac{1+i}{1-i}$ in forma trigonometrica.
Risolvere

$$(1-i)z^3 = 1+i.$$

e disegnare (approssimativamente) le soluzioni sul piano complesso.

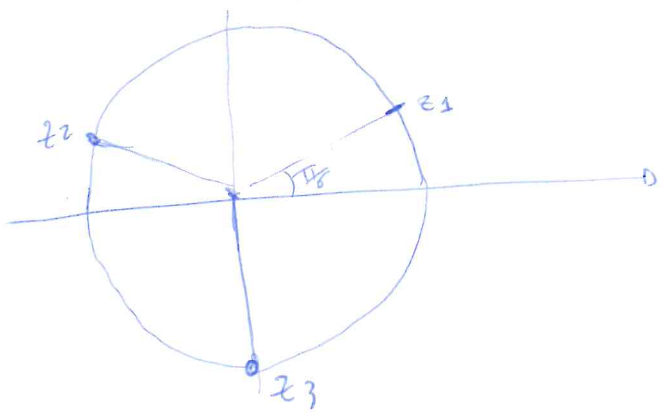
$$\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1-1+2i}{2} = \boxed{i}$$

Forma Trigonometrica: $w = i = i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Risolvo: $z^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow \begin{cases} \rho = |z| = 1 \\ \theta = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \end{cases}$ $k = 0, 1, 2$

con $z = \rho e^{i\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = e^{i\frac{5}{6}\pi}, \quad z_3 = e^{i\frac{3}{2}\pi}}$$



(3) (5 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^{2x} - e^x - 2}\,dx.$$

$\log 4$ / $\log 3$ → DIETRO

$$\int_{\log 3}^{\log 4} \frac{e^{3x}}{e^{2x}-e^{x}-2}\,dx$$

Pongo $e^x = t$
$\Rightarrow dt = e^x dx$

$$= \int_3^4 \frac{t^2}{t^2-t-2}\,dt = \int_3^4 \left(1 + \frac{t+2}{t^2-t-2}\right)dt$$

Considero: $\dfrac{t+2}{t^2-t-2} = \dfrac{t+2}{(t-2)(t+1)}$

Cerco A e B t.c.

$$\frac{t+2}{(t-2)(t+1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+1}$$

$$\Rightarrow At + A + Bt - 2B = t+2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B = 1 \\ A-2B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1-B \\ 1-B-2B = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = (4-3) + \frac{4}{3}\int_3^4 \frac{1}{t-2}\,dt - \frac{1}{3}\int_3^4 \frac{1}{t+1}$$

$$= 1 + \left[\frac{4}{3}\log(t-2)\right]_3^4 - \frac{1}{3}\left[\log(t+1)\right]_3^4$$

$$= 1 + \frac{4}{3}\log 2 - \frac{1}{3}\log 5 + \frac{1}{3}\log 4$$

MATRICOLA...................... NOME E COGNOME................................

(4) (5 punti) Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{n^\alpha + n}\right) \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n^2+1} - n}$$

$\cdot\ \tan\left(\frac{1}{n^\alpha+n}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha+n}$ per $n \to +\infty$

$\cdot\ e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

$\cdot\ \sqrt{n^2+1} - n \sim n\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right] \sim n\left(\cancel{1} + \frac{1}{n^2} - \cancel{1}\right) \sim n^{-1}$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow\ a_n \sim \frac{1}{n^\alpha+n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} = \frac{1}{n^\alpha+n}$

La serie converge $\iff \boxed{\alpha > 1}$

(5) (5 punti) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\log t}{y^2} \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

dietro $\longrightarrow$

Per separazione di variabili $\Rightarrow \begin{cases} y^2 \cdot y' = \log t \\ y(1) = 2 \end{cases}$

$$\int_{y(1)}^{y(t)} z^2 \, dz = \int_1^t \log s \, ds$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left[y^3(t) - 8\right] = \left[\log s \cdot s\right]_1^t - \int_1^t \frac{\cancel{s}}{\cancel{s}} \, ds$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} y^3(t) = t\log t - t + 1 + \frac{8}{3}$$

$$= t \log t - t + \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \sqrt[3]{3t\log t - 3t + 11}}$$

MATRICOLA...................... NOME E COGNOME................................

(6) (7 punti) Studiare la seguente funzione e disegnarne un grafico qualitativo

$$f(x) = \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Determinare in particolare:

- Dominio,
- Limiti negli estremi del dominio,
- Intersezioni con gli assi;
- Intervalli di monotonia,
- Eventuali punti di massimo e minimo locale e/o assoluti, sup f e inf f;
- Eventuali punti di non derivabilità.

DOMINIO $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

LIMITI • $\lim_{x \to \pm\infty} \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \emptyset$ • $\lim_{x \to -1} \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = +\infty$

• $\lim_{x \to 1} \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -\infty$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI $f(0)=0$, $\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0 \iff \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 1$

$\iff \underbrace{x-1 = x+1}_{\text{imposs}} \vee \underbrace{x-1 = -x-1}_{\Downarrow\ x=0}$

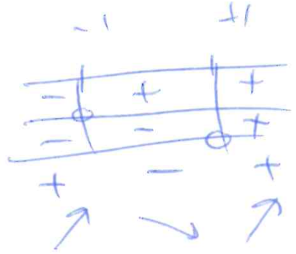
C'è un'unica intersezione con gli assi: il punto $(0,0)$.

MONOTONIA: $f'(x) = \mathrm{sgn}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \left|\frac{x+1}{x-1}\right| \cdot \frac{x+1-x+1}{(x-1)^2}$

$= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{+2}{(x-1)^2}$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \iff \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \to$ N: $x > -1$

D: $x > 1$



f è $\nearrow$ in $(-\infty, -1)$

f è $\searrow$ in $(-1, 1)$

f è $\nearrow$ in $(1, +\infty)$

$\inf f = -\infty$

$\sup f = +\infty$

- Non ci sono estremanti locali.
- Non ci sono punti di non derivabilità.